

**CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI**

A.A. 2024-2025

Prova scritta in aula del 11.02.2025

Parte II - Testo 1

*Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.*

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

**Esercizio n. 1 (17 punti)**

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità  $C$ ,  $M_C$ .

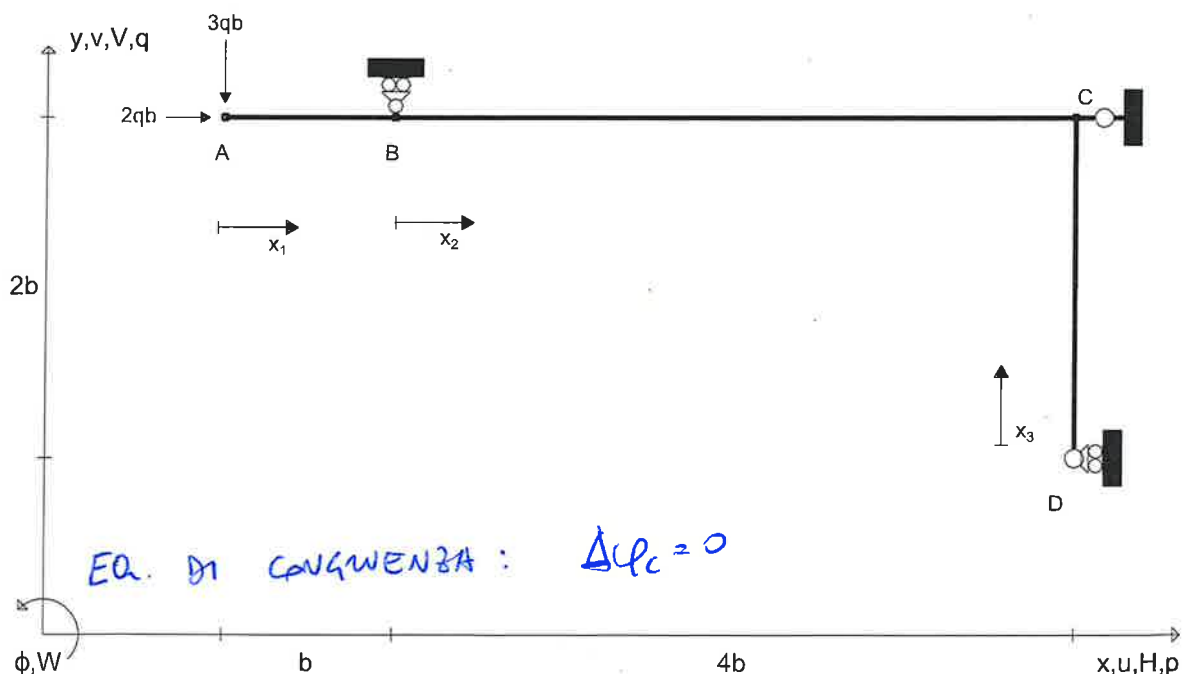
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, la rotazione del punto  $D$ ,  $\varphi_D$ .

*Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.*

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 2 11.02.25\*001



## Esercizio n. 2 (7 punti)

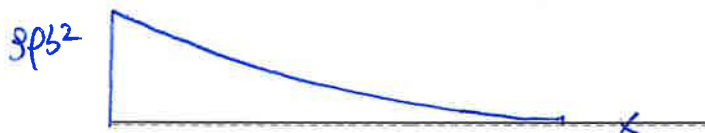
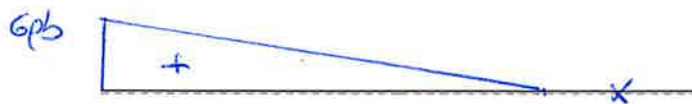
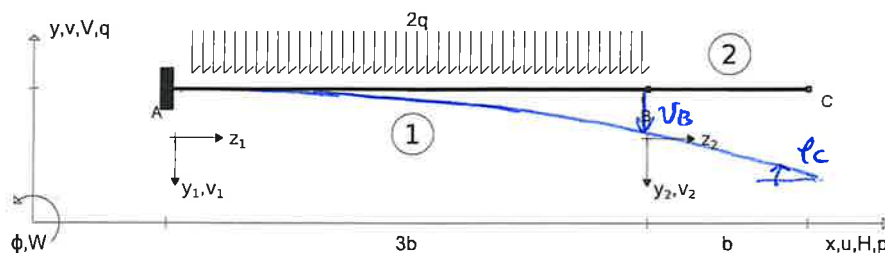
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti *A*, *B* e *C*.

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

1. La deformata della linea d'asse,  $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$ ;
2. La sua derivata prima,  $v'(z) = v'_1(z_1) \cup v'_2(z_2)$ ;
3. La rotazione del punto *C*,  $\varphi_C$ ;
4. Lo spostamento verticale del punto *B*,  $v_B$ .

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA\_2 11.02.25\*001



$$H_A (\Rightarrow) = 0; V_A (\uparrow) = 6pb; M_A (\curvearrowright) = 3pb^2;$$

$$N_{AB} = //; T_{AB} = 6pb - 2qz_1; M_{AB} = -3pb^2 + 6pbz_1 - qz_1^2;$$

$$N_{BC} = //; T_{BC} = //; M_{BC} = //$$

$$\text{c.c in A} = v_1(z_1=0)=0; v'_1(z_1=0)=0; \text{c.c in B} = v_1(z_1=3b)=v_2(z_2=0); v'_1(z_1=3b)=v'_2(z_2=0);$$

$$\text{c.c in C} = //$$

$$v_1(z_1) = \frac{1}{EI} \left( 3pb^2 z_1^2 - pb z_1^3 + \frac{1}{2} q z_1^4 \right); v'_1(z_1) = \frac{1}{EI} \left( 6pb^2 z_1 - 3pb z_1^2 + \frac{1}{3} q z_1^3 \right);$$

$$v_2(z_2) = \frac{1}{EI} \left( 3pb^3 z_2 + \frac{81}{4} pb^4 \right); v'_2(z_2) = \frac{1}{EI} (3pb^3);$$

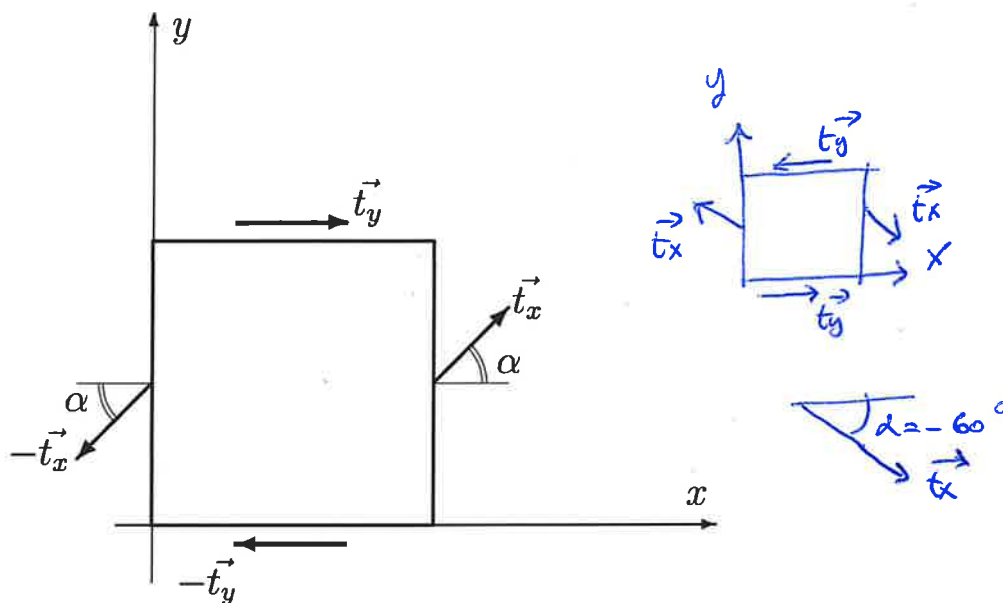
$$v_B = \frac{81 pb^4}{4EI} (\downarrow); \varphi_C = \frac{3pb^3}{EI} (\curvearrowright);$$

### Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi  $x$  e  $y$  ai vettori sforzo (piani)  $\vec{t}_x$  e  $\vec{t}_y$  rispettivamente; di questi  $\vec{t}_x$  è inclinato rispetto all'asse  $x$  di un angolo  $\alpha = -60^\circ$  (sicché:  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ ) e ha modulo di valore  $|\vec{t}_x| = 25$  MPa. L'altro vettore sforzo,  $\vec{t}_y$ , è invece *orizzontale* (ma di verso non specificato!), come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , e la massima tensione tangenziale,  $\tau_{\max}$ .

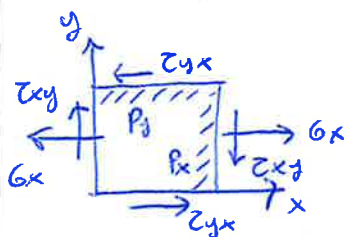
Determinare inoltre quanto vale l'angolo  $\varphi$  formato dall'asse  $x$  e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo,  $\sigma_1$ .



$$\sigma_x = \underline{12,500} \text{ (MPa)}; \sigma_y = \underline{0,00} \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = \underline{-21,650} \text{ (MPa)};$$

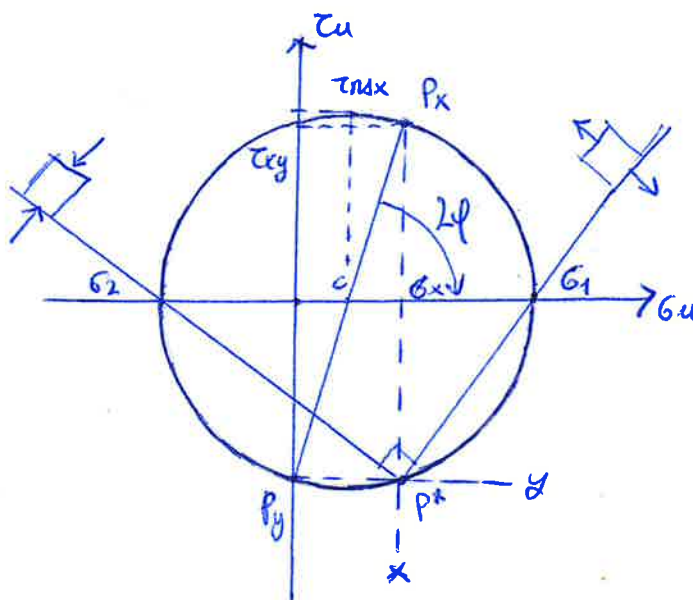
$$\sigma_1 = \underline{28,785} \text{ (MPa)}; \sigma_2 = \underline{-16,285} \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = \underline{22,535} \text{ (MPa)};$$

cerchio di Mohr:

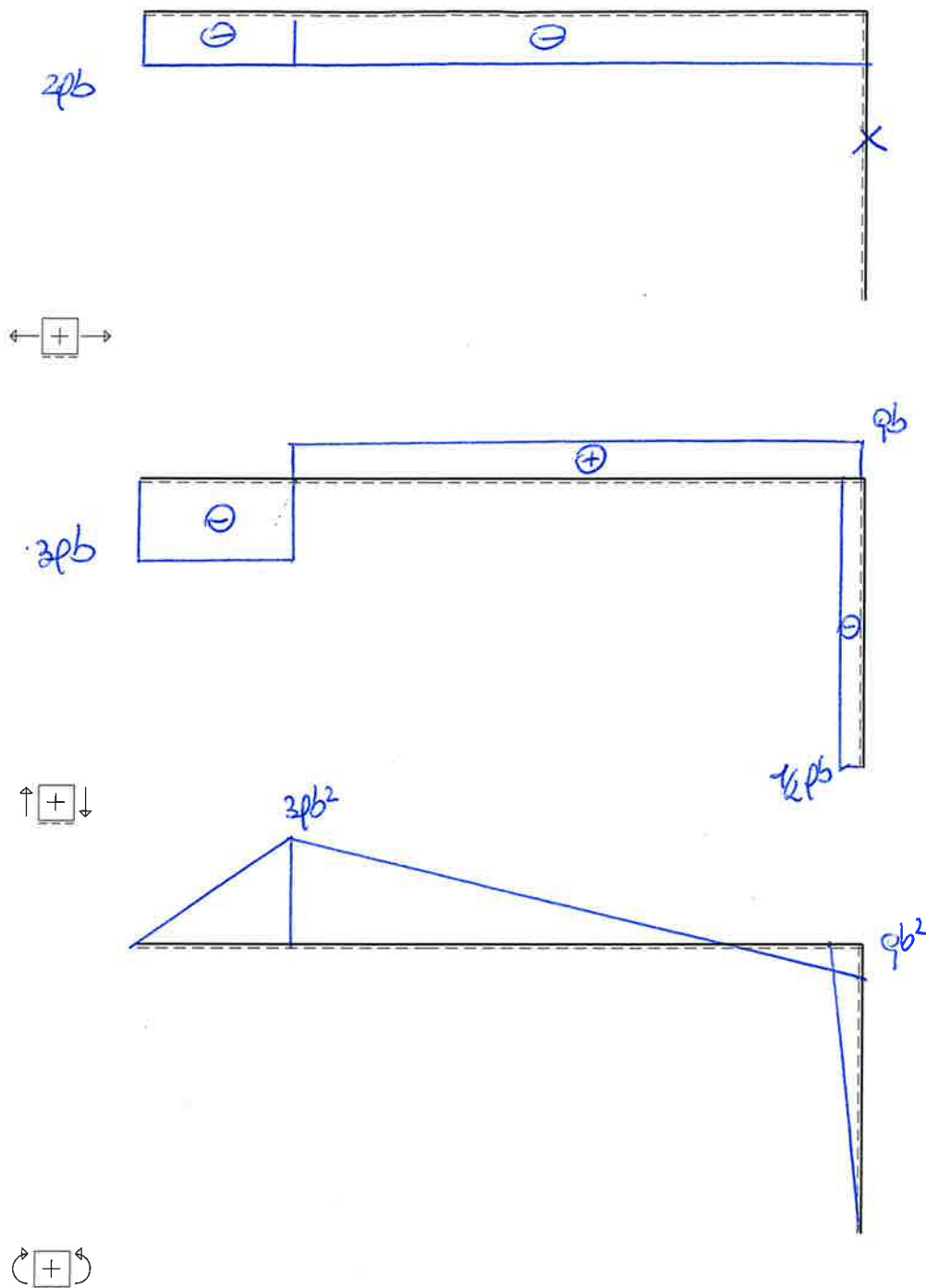


$$P_x = (12,500; 21,650)$$

$$P_y = (0,000; -21,650)$$

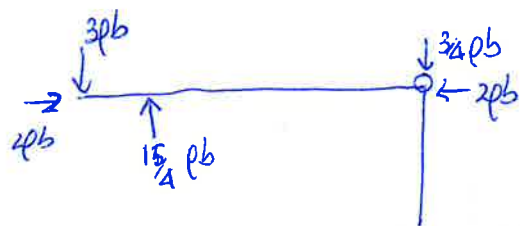
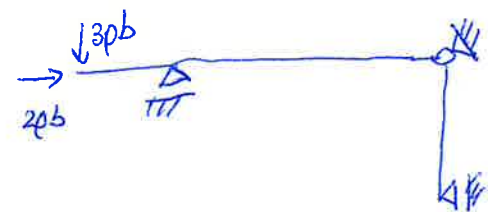


$$\varphi = \underline{-36,95} \text{ (}^\circ\text{)};$$

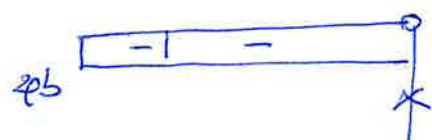


$$\begin{aligned}
 V_B(\uparrow) &= 4qb; & H_C(\Rightarrow) &= -\frac{5}{2}qb; & V_C(\uparrow) &= -qb; & H_D(\Rightarrow) &= \frac{1}{2}qb; & M_C(\curvearrowright) &= qb^2; \\
 N_{AB} &= -2qb; & T_{AB} &= -3qb; & M_{AB} &= -3qb \times 1; \\
 N_{BC} &= -2qb; & T_{BC} &= qb; & M_{BC} &= -3qb^2 + qb \times 2; \\
 N_{DC} &= //; & T_{DC} &= -\frac{1}{2}qb; & M_{DC} &= \frac{1}{2}qb \times 3; \\
 \varphi_D &= \frac{qb^3}{3EI} \quad (15)
 \end{aligned}$$

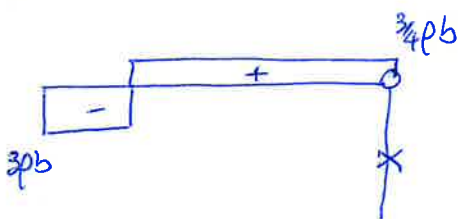
SP0



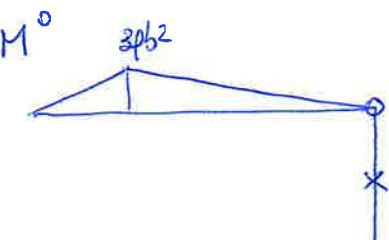
$N^0$



$T^0$



$M^0$



$$M_{AB}^0 = -3pbx_1$$

$$M_{BC}^0 = -3pb^2 + \frac{3}{4}pbx_2$$

MOMI

AB	b	//
BC	4b	$-\frac{3pb}{4}x_2 + \frac{3p}{16}x_2^2$
DC	2b	//

$M^{12}$

$$\frac{1}{16b^2}x_2^2$$

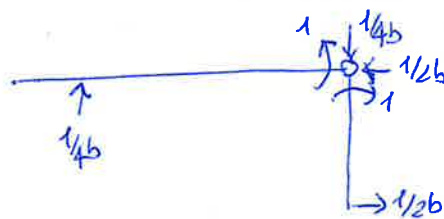
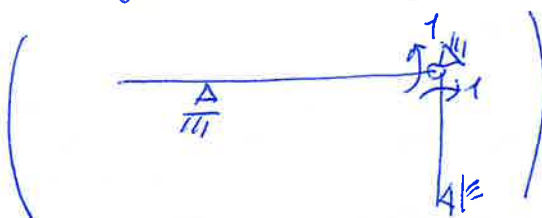
$$\frac{1}{4b^2}x_2^2$$

$$C_{10} = \frac{1}{ES} \int_0^{4b} \left( -\frac{3pb}{4}x_2 + \frac{3p}{16}x_2^2 \right) dx = \frac{1}{ES} \left[ -\frac{3pb}{4} \frac{x_2^2}{2} + \frac{3p}{16} \frac{x_2^3}{3} \right]_0^{4b} = \frac{1}{ES} \left[ -\frac{3pb}{4} \frac{16b^2}{2} + \frac{3p}{16} \frac{64b^3}{3} \right] = -\frac{2pb^3}{ES}$$

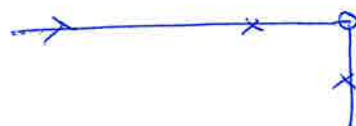
$$C_{11} = \frac{1}{ES} \int_0^{4b} \left( \frac{1}{16b^2}x_2^2 \right) dx + \frac{1}{ES} \int_0^{2b} \left( \frac{1}{4b^2}x_2^2 \right) dx = \frac{1}{ES} \left[ \frac{1}{16b^2} \frac{x_2^3}{3} \right]_0^{4b} + \frac{1}{ES} \left[ \frac{1}{4b^2} \frac{x_2^3}{3} \right]_0^{2b} = \frac{1}{ES} \left[ \frac{1}{16b^2} \frac{64b^3}{3} \right] + \frac{1}{ES} \left[ \frac{1}{4b^2} \frac{8b^3}{3} \right] = \frac{4b}{3ES} + \frac{2b}{3ES} = \frac{2b}{ES}$$

$$X = -C_{10}/C_{11} = pb^2$$

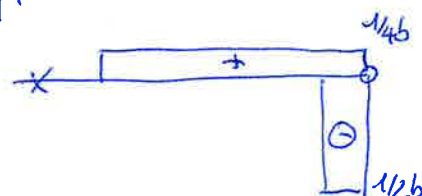
SA1



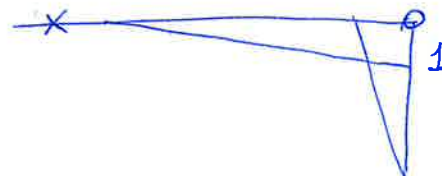
$N^1$



$T^1$



$M^1$



$$M_{BC}^1 = \frac{1}{4b}x_2$$

$$M_{DC}^1 = \frac{1}{2b}x_3$$